

$$(1) \quad \boxed{A - B = A + (-B)}$$

$$(2) \quad \boxed{A : B = A \cdot \left(\frac{1}{B}\right)}$$

---

$$(3) \quad \boxed{A + B = B + A} \quad (\text{закон комутације за сабирање})$$

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A} \quad (\text{закон комутације за множење})$$

$$(4) \quad \boxed{(A + B) + C = A + (B + C)} \quad (\text{закон асоцијације за сабирање})$$

$$\boxed{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)} \quad (\text{закон асоцијације за множење})$$

$$(5) \quad \boxed{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C} \quad (\text{закон дистрибуције множења према сабирању})$$

$$\boxed{(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C} \quad (\text{закон дистрибуције сабирања према множењу})$$

---

$$(6) \quad \boxed{\begin{aligned} (A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ (A - B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \end{aligned}} \quad (\text{квадрат бинома})$$

$$(7) \quad \boxed{\begin{aligned} (A + B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ (A - B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \end{aligned}} \quad (\text{куб бинома})$$

$$(8) \quad \boxed{A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)} \quad (\text{разлика квадрата})$$

$$(9) \quad \boxed{A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)} \quad (\text{збир кубова})$$

$$(10) \quad \boxed{A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)} \quad (\text{разлика кубова})$$

$$(11) \quad \boxed{A^4 - B^4 = (A - B)(A + B)(A^2 + B^2)}$$

---

## ОПЕРАЦИЈЕ СА СТЕПЕНИМА

---

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}$$

$a^n$  → (степен)

$a$  → (основа степена)

$n$  → (изложилац степена)

---

(1)  $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$  (множење степена једаких основа)

(2)  $\boxed{a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$  (дељење степена једнаких основа)

(3)  $\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$  (степеновање степена)

(4)  $\boxed{a^0 = 1}$  за  $\forall a \neq 0$

(5)  $\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}}$  (превођење степена са негативним изложивоцем у степен са позитивним изложивоцем)

---

(6)  $\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$  (множење степена једнаких изложилаца)  
 $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$  (степеновање производа)

(7)  $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$  (дељење степена једнаких изложилаца)  
 $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$  (степеновање количника)

---

## ОПЕРАЦИЈЕ СА КОРЕНИМА

---

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^n = a} \quad (\text{дефиниција корена})$$

---

$$(1) \quad \boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}} \quad (\text{множење корена једнаких изложилаца})$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}} \quad (\text{кореновање производа})$$

$$(2) \quad \boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \quad (\text{дељење корена једнаких изложилаца})$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}} \quad (\text{кореновање количника})$$

$$(3) \quad \boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}} \quad (\text{кореновање корена})$$

$$(4) \quad \boxed{\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}} \quad (\text{скраћивање (проширивање) корена})$$

---

$$(5) \quad \boxed{\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}} \quad (\text{пребођење корена у степен (и обрнуто)})$$

---

## КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА

Квадратна једначина:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

кој има **канонски облик**:

$$A(x - \alpha)^2 + \beta = 0$$

где је:  $\alpha = \left(-\frac{B}{2A}\right)$  и  $\beta = -\frac{B^2 - 4AC}{4A}$

решава се по обрасцу:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Бројеви  $x_1$  и  $x_2$  називају се **решења** или **корени** квадратне једначине.

Израз  $B^2 - 4AC$  (који се налази под кореном у претходном обрасцу) назива се **дискриминанта** и означава са  $D$ , то јест:

$$D = B^2 - 4AC$$

Ако је  $D > 0$  онда су решења  $x_1$  и  $x_2$  **реална и различита**.

Ако је  $D = 0$  онда су решења  $x_1$  и  $x_2$  **реална и једнака**.

Ако је  $D < 0$  онда су решења  $x_1$  и  $x_2$  **конјуговано комплексна**.

Квадратни трином  $Ax^2 + Bx + C$  се **раставља на чиниоце** по обрасцу:

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2)$$

### ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ:

За једначину:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

важе **Вијетове формуле**:

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{B}{A}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$$

Ако једначину  $Ax^2 + Bx + C = 0$  поделимо са  $A$  добијамо:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 / : A$$

$$x^2 + \left(\frac{B}{A}\right) \cdot x + \left(\frac{C}{A}\right) = 0$$

Увођењем смене:  $p = \frac{B}{A}$  и  $q = \frac{C}{A}$  добијамо једначину:

$x^2 + px + q = 0$  за коју важе **Вијетове формуле**:

$$x_1 + x_2 = (-p)$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

## ЛОГАРИТАМ

### Дефиниција логаритма:

$$\boxed{\log_a b = x} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \boxed{a^x = b} \quad (a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge b > 0)$$

Специјално:

Ако је основа логаритма  $\boxed{10}$  онда се тај логаритам назива декадни логаритам и означава са  $\boxed{\log b}$ , то јест:

$$\boxed{\log b \equiv \log_{10} b}$$

Ако је основа логаритма број  $\boxed{e}$ , где је  $\boxed{e \approx 2,7182818284590452353602874713527\dots}$  односно  $\boxed{e \approx 2,72}$ , онда се тај логаритам назива Неперов логаритам или природни логаритам и означава са  $\boxed{\ln b}$  то јест:

$$\boxed{\ln b \equiv \log_e b}$$

### Својства логаритма:

$$(1) \quad \boxed{a^{\log_a b} = b}$$

$$(2) \quad \boxed{\log_a (a^c) = c}$$

$$(3) \quad \boxed{\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2} \quad (\text{логаритам производа})$$

$$(4) \quad \boxed{\log_a \left( \frac{b_1}{b_2} \right) = \log_a b_1 - \log_a b_2} \quad (\text{логаритам количника})$$

$$(5) \quad \boxed{\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b} \quad (\text{логаритам степена})$$

$$(6) \quad \boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$(7) \quad \boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \quad (\text{превођење логаритма са основом } \boxed{a} \text{ у логаритам са произвољном основом } \boxed{c} )$$

На основу својства (7) може се доћи до следећих својстава:

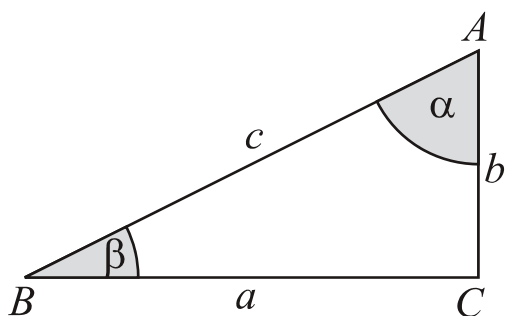
$$(8) \quad \boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

$$(9) \quad \boxed{\log_a b = -\log_{\left(\frac{1}{a}\right)} b}$$

## ТРИГОНОМЕТРИЈА

### Тригонометријске функције оштрог угла правоуглог троугла:

$$\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ} \quad (\text{углови } \alpha \text{ и } \beta \text{ су комплементни})$$



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta$$

### Тригонометријске функције углова од: 30°; 60°; 45°.

$$\sin 30^\circ = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

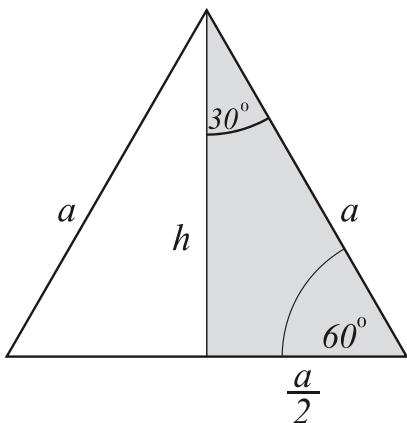
$$\boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \boxed{\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

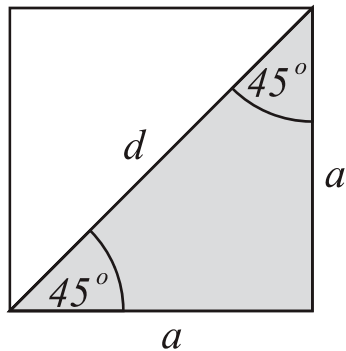
$$\boxed{\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{h}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}}$$



$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$



$$d = a\sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 \Rightarrow \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

На основу добијених резултата можемо формирати таблицу вредности тригонометријских функција за углове од  $30^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $45^\circ$ .

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

## Основни тригонометријски идентитети:

$$(1) \quad \boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$(2) \quad \boxed{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{cases}$$

$$(3) \quad \boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

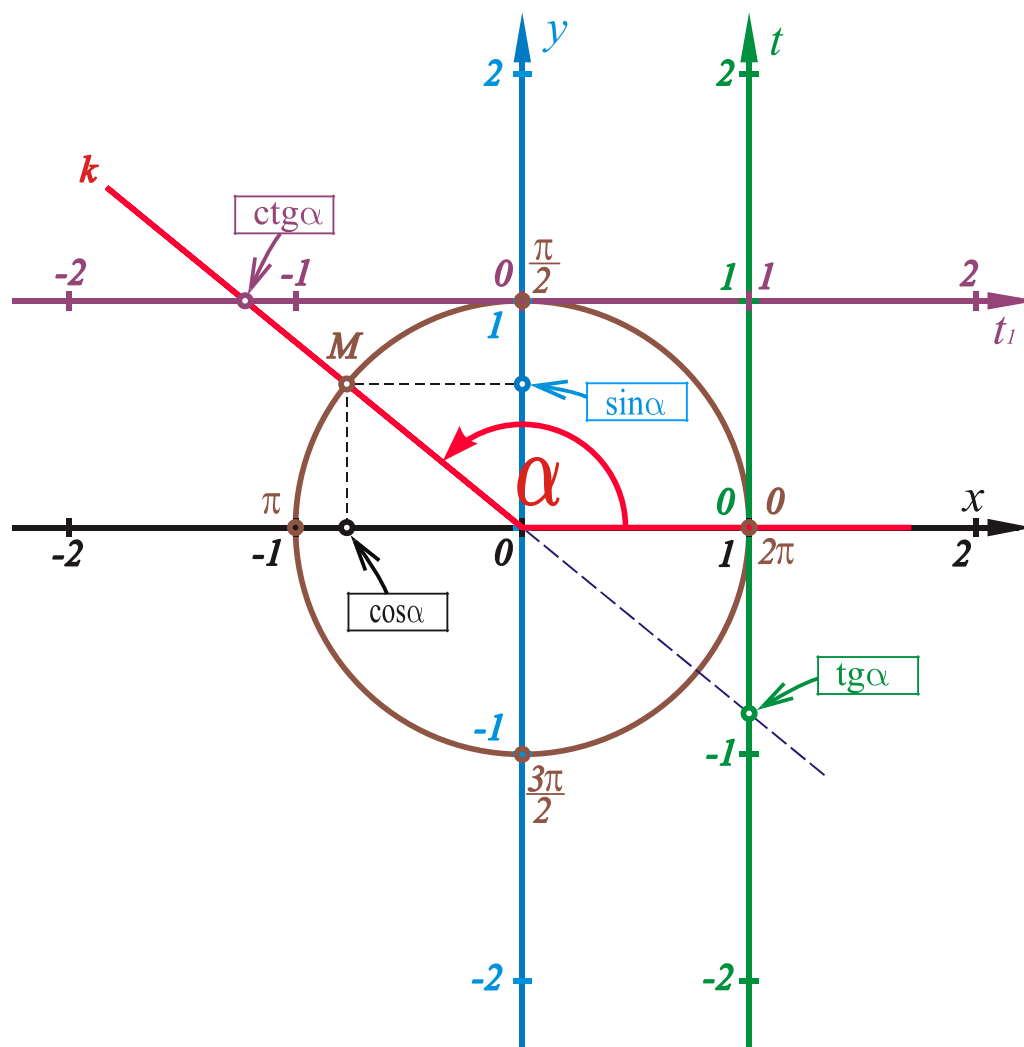
На основу идентитета (1) и (3) добијамо следеће идентитете:

$$(4) \quad \boxed{\sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}}$$

$$(5) \quad \boxed{\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}}$$



## Тригонометријски круг:



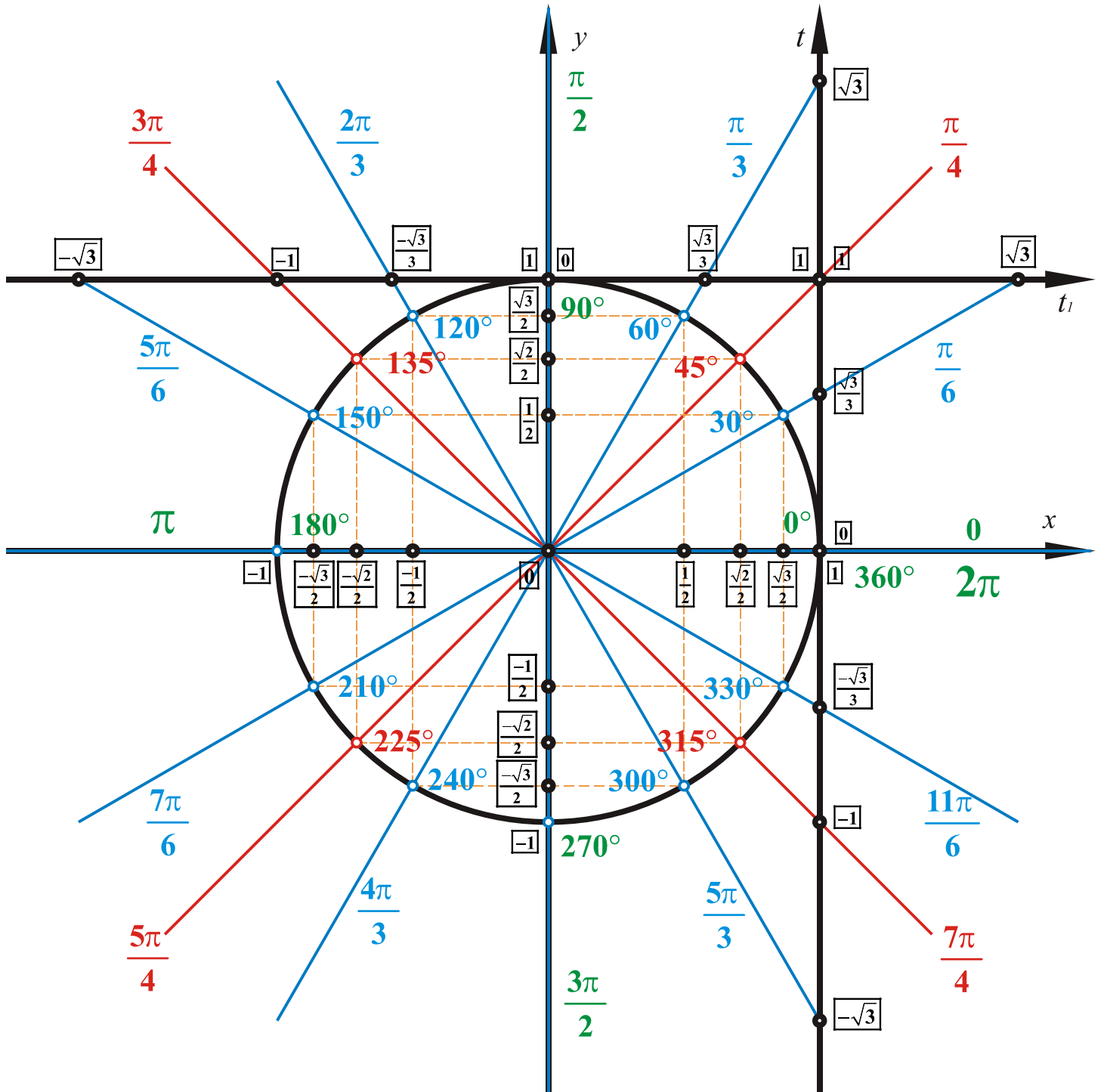
**Синус** угла  $\alpha$  читавамо на  $y$ -оси .  
(пројекција тачке  $M$  на  $y$ -осу)

**Косинус** угла  $\alpha$  читавамо на  $x$ -оси .  
(пројекција тачке  $M$  на  $x$ -осу)

**Тангенс** угла  $\alpha$  читавамо на тангенсној оси  $t$ .  
(пресек крака  $k$  или његовог продужетка и  $t$ -осе)

**Котангенс** угла  $\alpha$  читавамо на котангенсној оси  $t_1$ .  
(пресек крака  $k$  или његовог продужетка и  $t_1$ -осе)

Неки важни углови и вредности њихових тригонометријских функција приказани су на тригонометријском кругу:



Очитавањем са тригонометријског круга добијамо следећу таблицу вредности тригонометријских функција:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0	$\infty$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\infty$	0	$\infty$
$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

### Адиционе формуле:

$$(1) \quad \frac{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$(2) \quad \frac{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$(3) \quad \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}}$$

$$(4) \quad \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}}{\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}}$$

---

### Тригонометријске функције за двоструки угао:

$$(1) \quad \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$(2) \quad \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$(3) \quad \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$(4) \quad \operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$$

---

### Тригонометријске функције за половину угла:

$$(1) \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$(2) \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$(3) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$(4) \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

---

### Трансформација збира и разлике у производ:

$$(1) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(2) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(3) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(4) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

---

## Трансформација производа у збир и разлику:

$$(1) \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

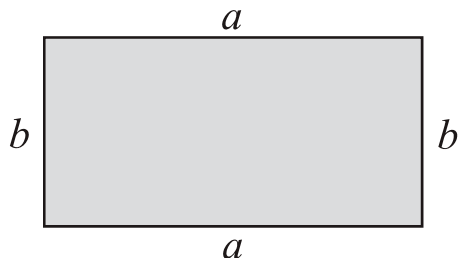
$$(2) \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$(3) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

---

# ПОВРШИНА И ОБИМ РАВНИХ ФИГУРА

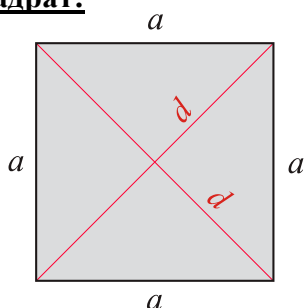
(1) Правоугаоник:



$$P = a \cdot b$$

$$O = 2a + 2b$$

(2) Квадрат:



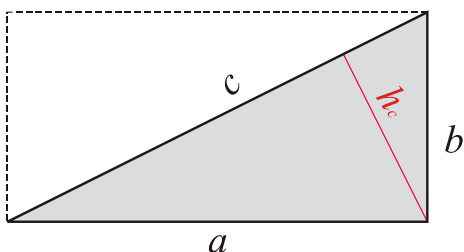
$$P = a^2$$

ИЛИ

$$P = \frac{d^2}{2}$$

$$O = 4a$$

(3) Правоугли троугао:



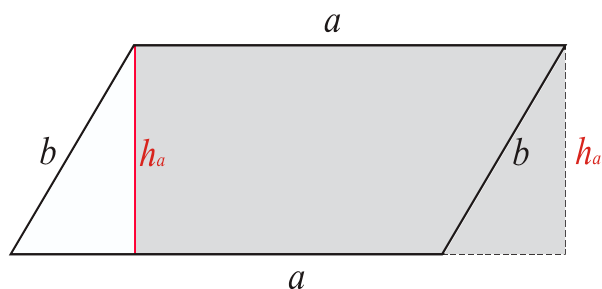
$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

ИЛИ

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$O = a + b + c$$

(4) Паралелограм:



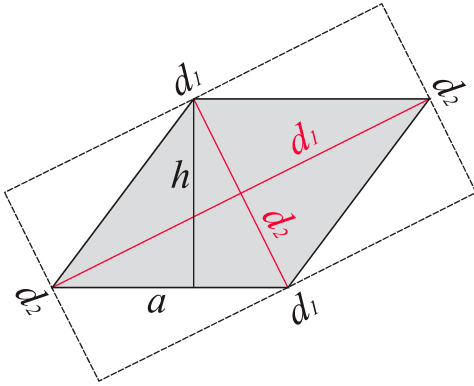
$$P = a \cdot h_a$$

ИЛИ

$$P = b \cdot h_b$$

$$O = 2a + 2b$$

(5) **Ромб :**

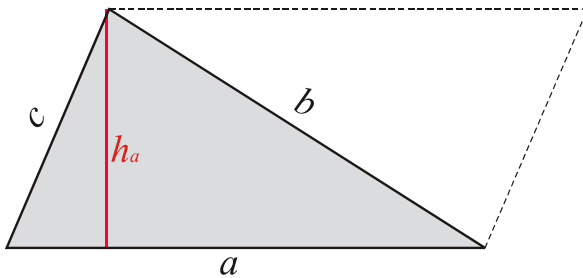


$$P = a \cdot h \quad \text{или}$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$O = 4a$$

(6) **Троугао (било који):**



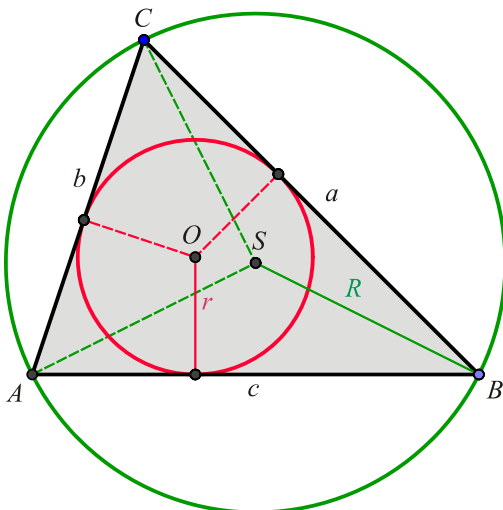
$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$O = a + b + c$$

**Херонов образац:**

$$P = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Где је:  $s = \frac{a + b + c}{2}$  (полуобим)



$$P = r \cdot s$$

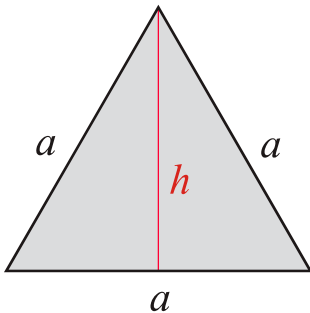
Где је  $r$  полупречник уписане кружнице а  $s$  поубим.

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Где је  $R$  полупречник описане кружнице.



(7) **Једнакостраничан троугао:**



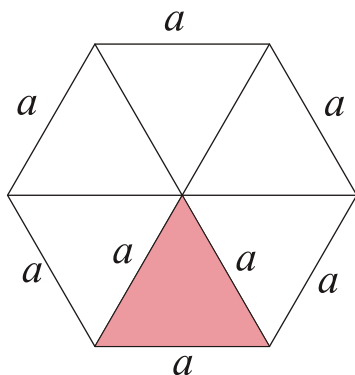
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (\text{висина једнакостраничног троугла})$$

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$O = 3a$$

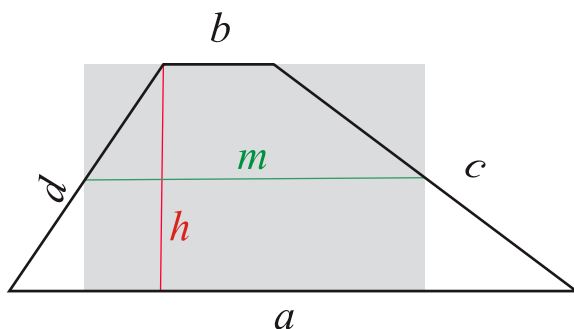
(8) **Правилан шестоугао:**



$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$O = 6a$$

(9) **Трапез:**



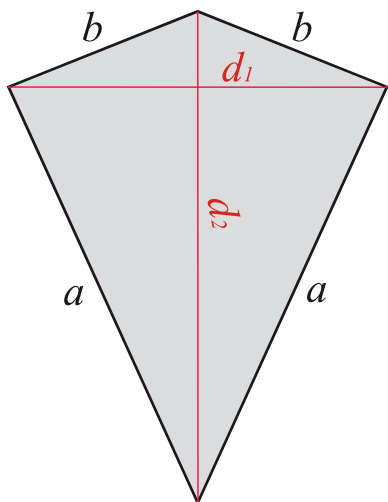
$$m = \frac{a+b}{2} \quad (\text{средња линија трапеза})$$

$$P = m \cdot h$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$O = a + b + c + d$$

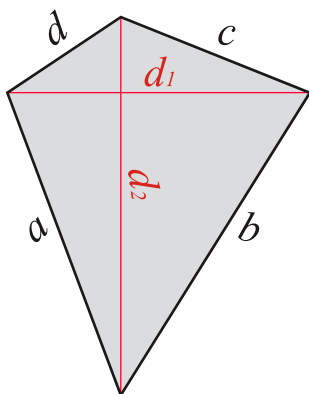
(10) Делтоид:



$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$O = 2a + 2b$$

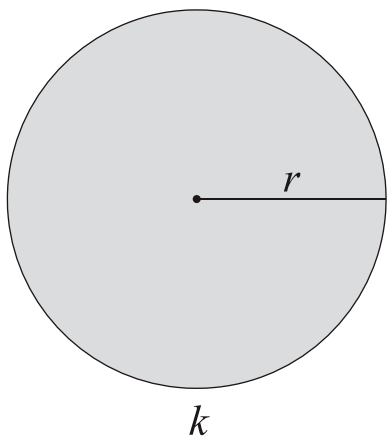
(11) Четвороугао са нормалним дијагоналама:



$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$O = a + b + c + d$$

(12) Круг:

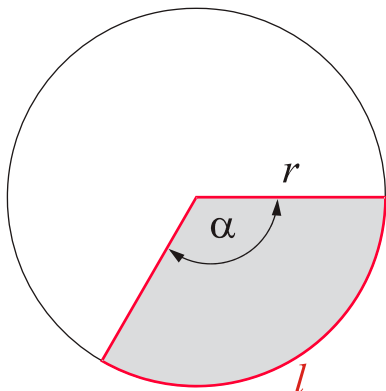


$$P = r^2 \pi \quad (\text{површина круга})$$

$$O = 2r\pi \quad (\text{обим круга})$$

(12.1) Делови круга:

Кружни исечак:



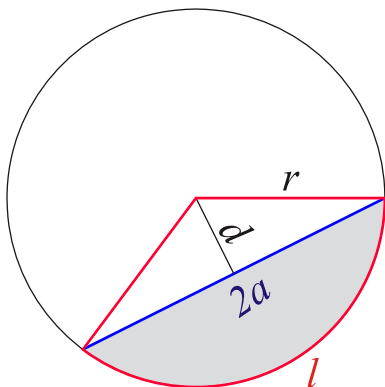
$$l = \frac{r\pi \cdot \alpha}{180^\circ} \quad (\text{дужина кружног лука})$$

$$P_i = \frac{r^2 \pi \cdot \alpha}{360^\circ} \quad (\text{површина кружног исечка})$$

или

$$P_i = \frac{r \cdot l}{2} \quad (\text{површина кружног исечка})$$

Кружни одсечак:



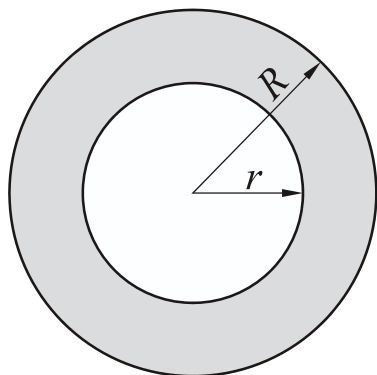
$$P = P_i - P_\Delta$$

$$P_i = \frac{r^2 \pi \cdot \alpha}{360^\circ} \quad \text{или} \quad P_i = \frac{r \cdot l}{2}$$

$$P_\Delta = \frac{2a \cdot d}{2} = a \cdot d$$

$$O = l + 2a$$

Кружни прстен:



$$P = P_R - P_r$$

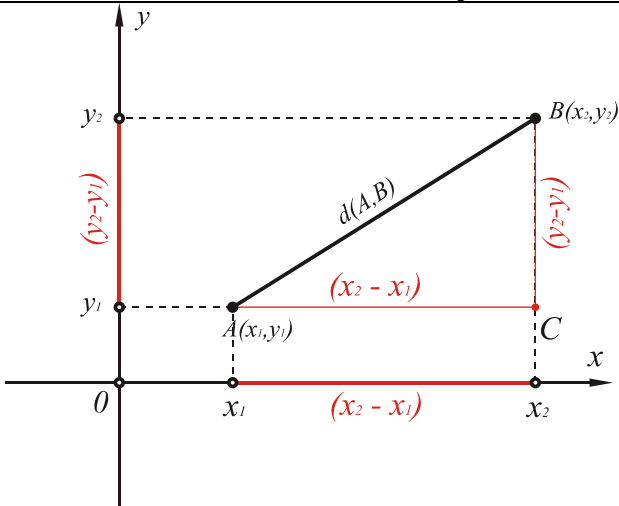
$$P = R^2 \pi - r^2 \pi = \pi (R^2 - r^2)$$

$$O = P_R + P_r$$

$$O = 2R\pi + 2r\pi = 2\pi (R + r)$$

# АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

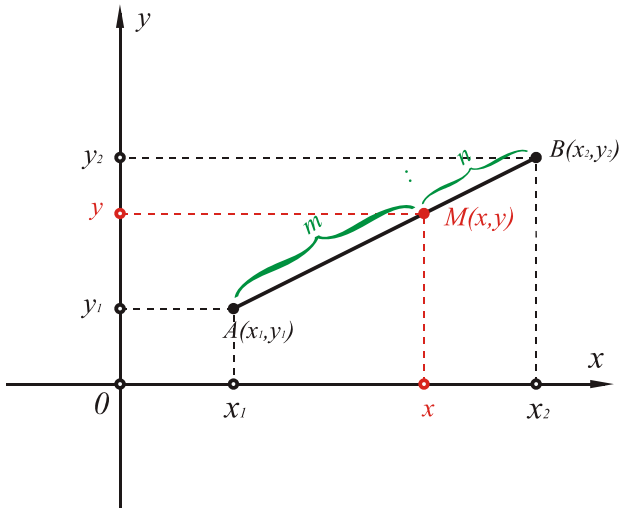
## Растојање између две тачке (дужина дужи)



$$d(A, B) \equiv |AB| \quad (\text{растојање између тачака } A \text{ и } B)$$

$$d(A, B) \equiv |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## Подела дужи у размери (m : n)

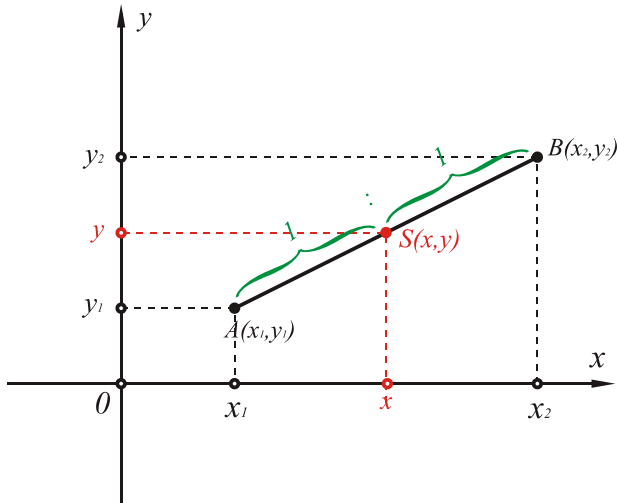


$$x = \frac{m \cdot x_2 + n \cdot x_1}{m + n}$$

$$y = \frac{m \cdot y_2 + n \cdot y_1}{m + n}$$

(координате деобене тачке)

Специјално, ако је размера ( $m : n = 1 : 1$ ) то јест ако је деобена тачка  $S(x, y)$  средиште дужи  $AB$  онда се координате тог средишта израчунавају по обрасцима:



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

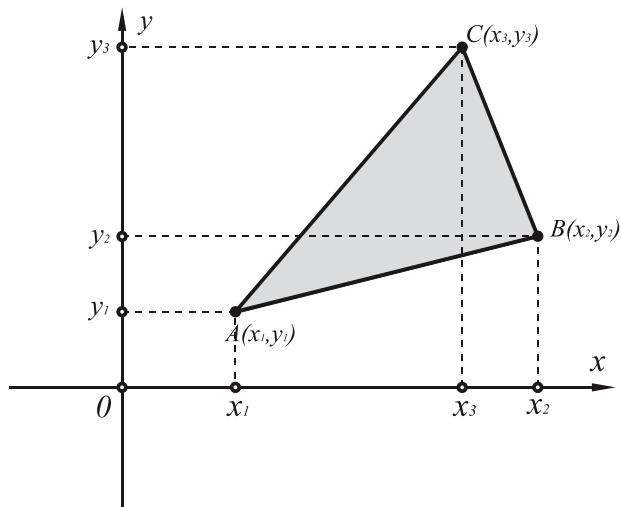
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

(координате средине дужи)

---

## Површина троугла

---



$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

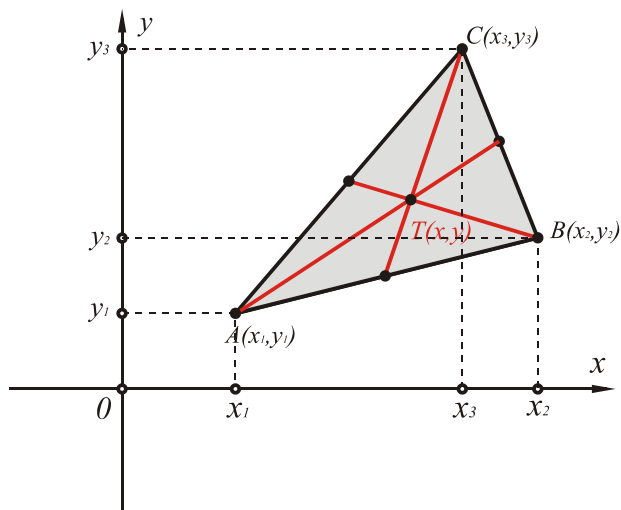
или:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

---

## Координате тежишта троугла

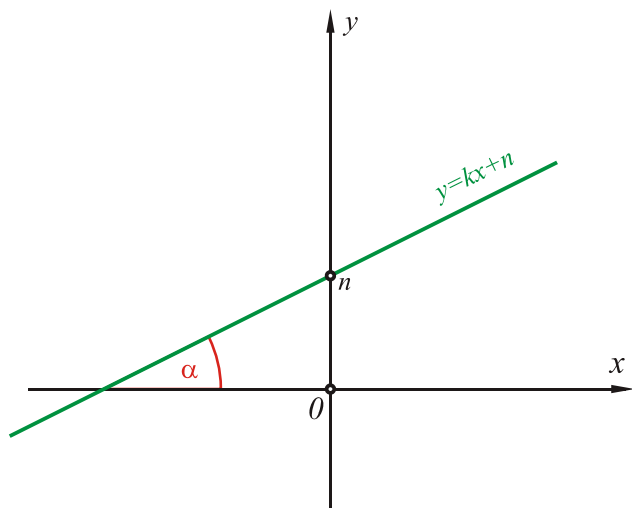
---



$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

## Једначина праве:



$$y = k \cdot x + n \quad (\text{експлицитни облик})$$

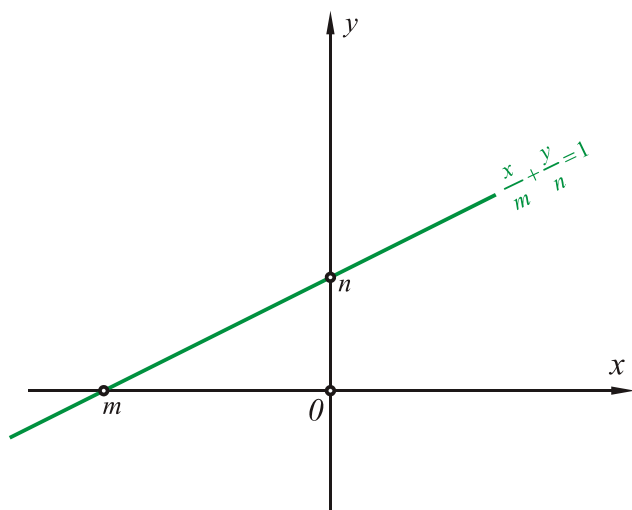
$k$  → (коефицијент правца праве)

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

$\alpha$  → (угао између праве и  $(x^+)$ -осе)

$n$  → (одсечак на  $y$ -оси)

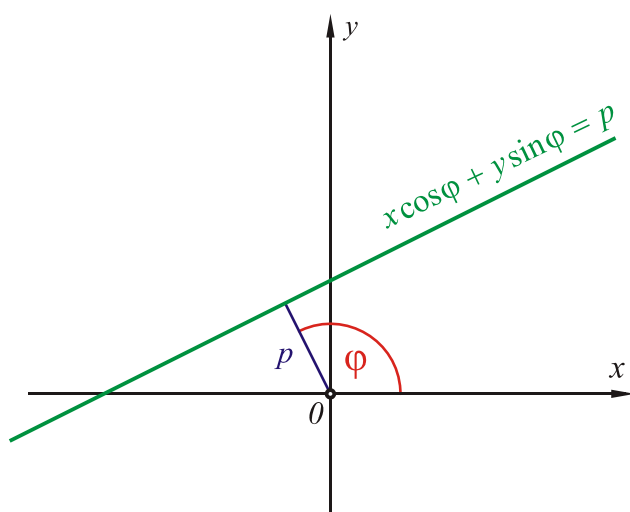
$$Ax + By + C = 0 \quad (\text{имплицитни облик})$$



$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad (\text{сегментни облик})$$

$m$  → (одсечак (сегмент) на  $x$ -оси)

$n$  → (одсечак (сегмент) на  $y$ -оси)

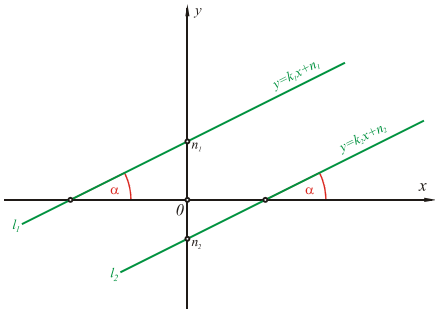


$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p \quad (\text{нормални облик})$$

$\varphi$  → (угао који гради нормала, конструисана из координатног почетка на праву, са  $(x^+)$ -осом)

$p$  → (нормално растојање од координатног почетка до праве)

## Међусобни положај две праве у равни:

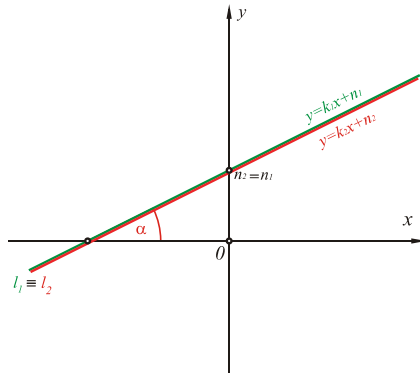


$$l_1 \parallel l_2$$



$$k_1 = k_2$$

$$n_1 \neq n_2$$

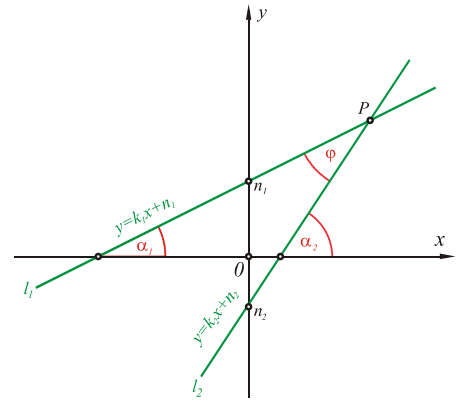


$$l_1 \equiv l_2$$



$$k_1 = k_2$$

$$n_1 = n_2$$



$$l_1 \cap l_2 = \{P\}$$



$$k_1 \neq k_2$$

За две праве  $l_1$  и  $l_2$  чије су једначине:

$$l_1 : y = k_1x + n_1$$

$$l_2 : y = k_2x + n_2$$

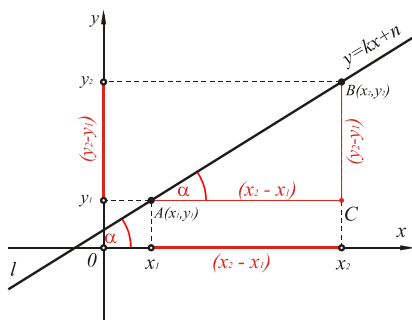
важи:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \quad (\text{услов паралелности две праве})$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = \left(-\frac{1}{k_2}\right) \quad (\text{услов нормалности две праве})$$

Ако је  $l_1 \cap l_2 = \{P\}$  онда се угао  $\varphi$  између правих  $l_1$  и  $l_2$  може израчунати помоћу обрасца:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (\text{тангенс угла између две праве})$$



**Једначина праве кроз једну тачку:**

$$l : y - y_1 = k(x - x_1)$$

**Једначина праве кроз две тачке:**

$$l : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1);$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{коэффициент правца праве која пролази кроз две тачке})$$

---

## КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА:

---

Квадратна једначина са две непознате која има облик:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0}$$

назива се **квадратна форма**. Квадратна форма може представљати:

- Једначину **кружнице**
- Једначину **елипсе**
- Једначину **хиерболе**
- Једначину **параболе**

---

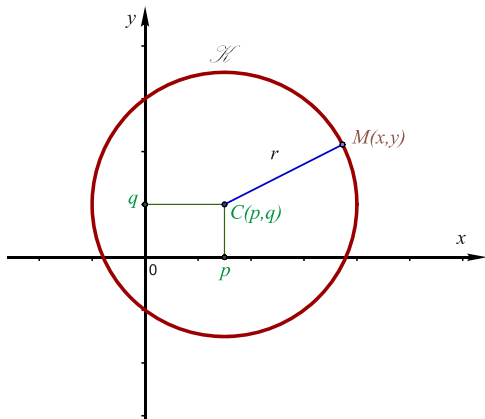
## Једначина КРУЖНИЦЕ:

---

### Дефиниција:

**Кружница** је скуп тачака у равни које имају особину да су подједнако удаљене од једна фиксна тачке  $C$  (центра).

---

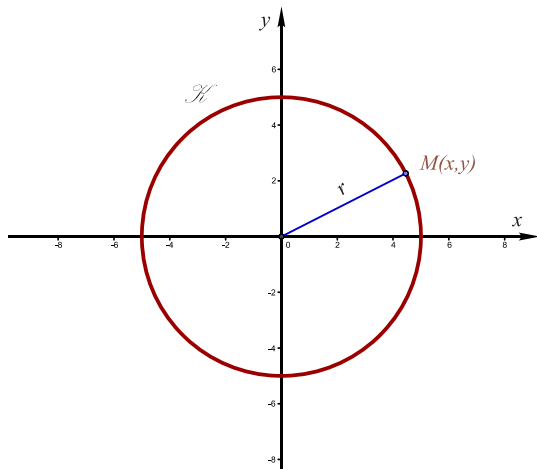


### Једначина кружнице:

$$\boxed{(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2}$$

$\boxed{p, q}$  → (координате центра кружнице)

$\boxed{r}$  → (полупречник кружнице)



Специјално, ако је центар кружнице координатни почетак, то јест ако је  $\boxed{p = 0}$  и  $\boxed{q = 0}$  онда је

### једначина кружнице:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

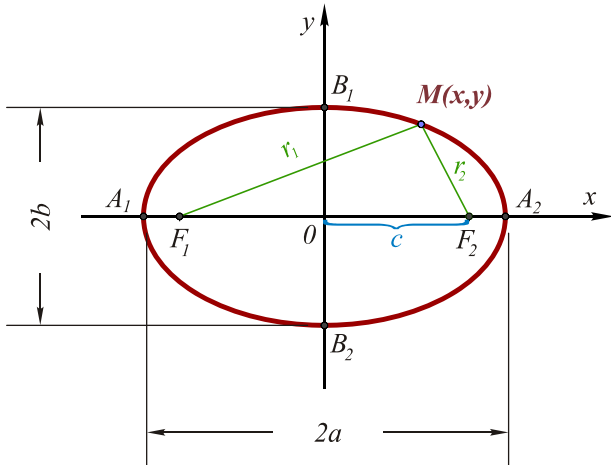
а та кружница се назива **централна кружница**.



## Једначина ЕЛИПСЕ:

### Дефиниција:

Елипса је скуп тачака у равни које имају особину да је за сваку од њих **збир растојања**  $r_1 + r_2$  од две фиксне тачке  $F_1$  и  $F_2$  (жиге) константан број  $2a$ .



### Једначина елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$a$  → хоризонтална (велика) полуоса

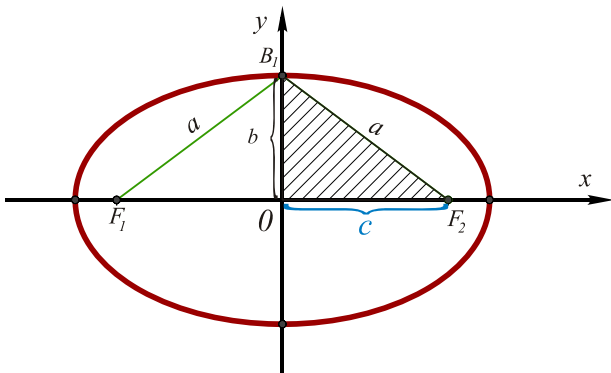
$b$  → вертикална (мала) полуоса

$c$  → жижна даљина

$F_{1,2}(\pm c, 0)$  → жиге (фокуси)

$A_{1,2}(\pm a, 0)$ ;  $B_{1,2}(\pm b, 0)$  → темена елипсе

$r_1, r_2$  → радијус вектори



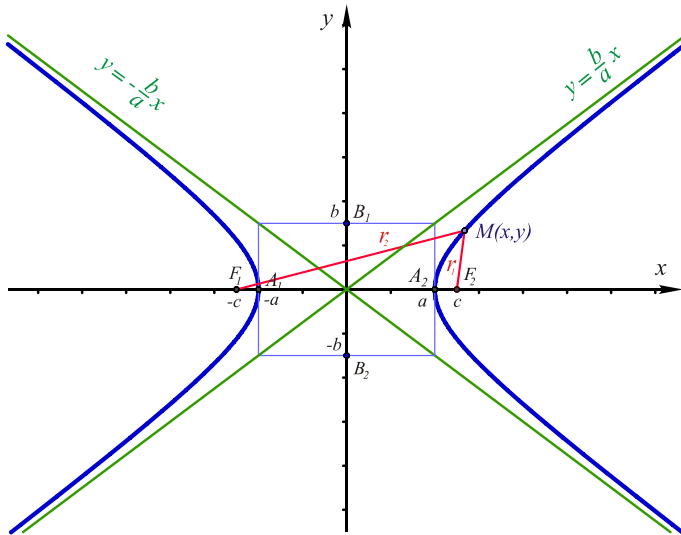
Применом Питагорине теореме на  $\triangle OB_1F_2$  добијамо:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = a^2 - c^2 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$

## Једначина ХИПЕРБОЛЕ:

### Дефиниција:

**Хипербола** је скуп тачака у равни које имају особину да је за сваку од њих **разлика растојања**  $|r_1 - r_2|$  од две фиксне тачке  $F_1$  и  $F_2$  (жиге) константан број  $2a$ .



### Једначина хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x \rightarrow \text{(једначине асимптота хиперболе)}$$

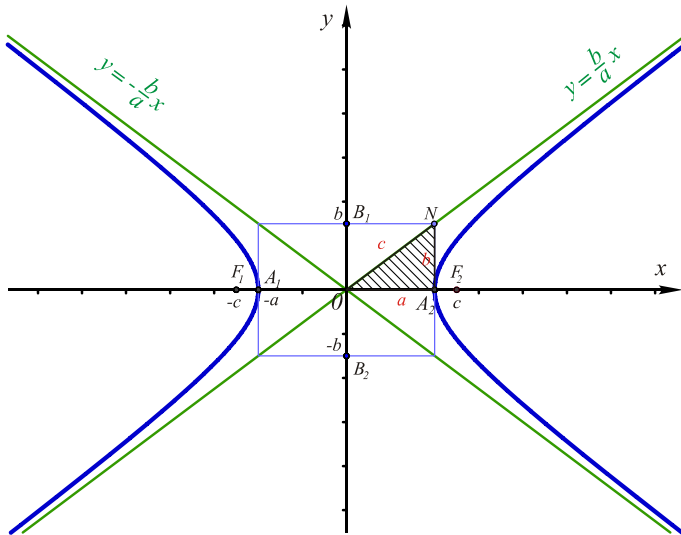
$a$  → хоризонтална (реална) полуоса

$b$  → вертикална (имагинарна) полуоса

$c$  → жижна даљина

$F_{1,2}(\pm c, 0)$  → жиге (фокуси)

$A_{1,2}(\pm a, 0)$  → темена хиперболе



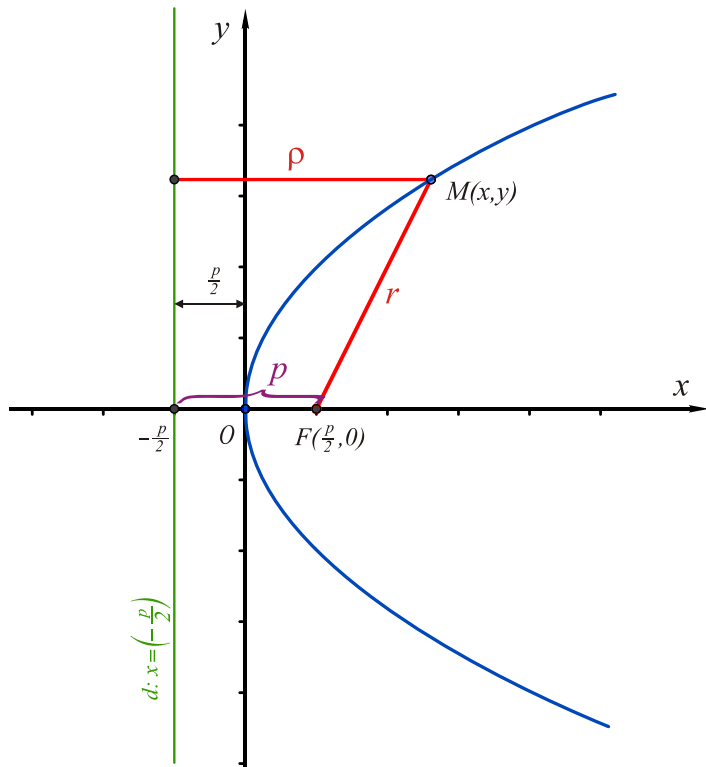
Применом Питагорине теореме на  $\triangle NOA_2$  добијамо:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = c^2 - b^2 \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases}$$

## Једначина ПАРАБОЛЕ:

### Дефиниција:

Парабола је скуп тачака у равни које имају особину да је свака од њих подједнако удаљена од једне фиксне тачке  $F$  (жиже) и дате праве  $d$  (директрисе).



### Једначина параболe:

$$y^2 = 2p \cdot x$$

$p$  → (параметар параболe или фокални параметар)  
 $p$  представља растојање између жиже и директрисе .

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  → жижа (фокус)

$d: x = -\frac{p}{2}$  → једначина директрисе

Услов додира праве  $y = kx + n$  и криве другог реда

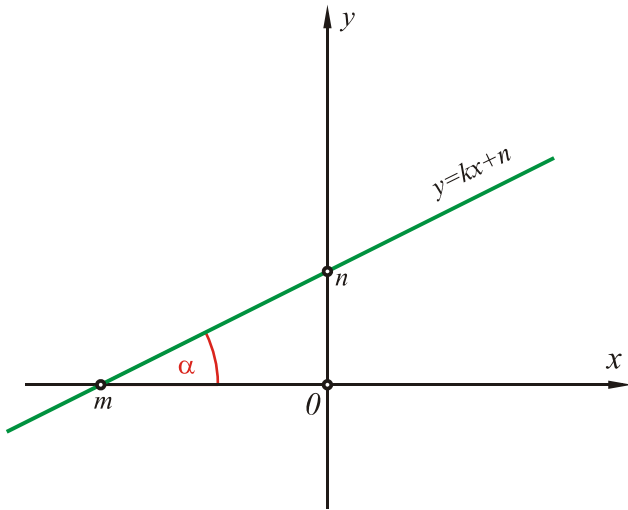
Једначина криве:	Услов додира:
<p><u>Кружница:</u></p> $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$	$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$
<p><u>Централна кружница:</u></p> $x^2 + y^2 = r^2$	$r^2(k^2 + 1) = n^2$
<p><u>Елипса:</u></p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a^2k^2 + b^2 = n^2$
<p><u>Хипербила:</u></p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a^2k^2 - b^2 = n^2$
<p><u>Парабола:</u></p> $y^2 = 2p \cdot x$	$p = 2kn$

---

## Елементарне функције

---

(1) Линеарна функција:

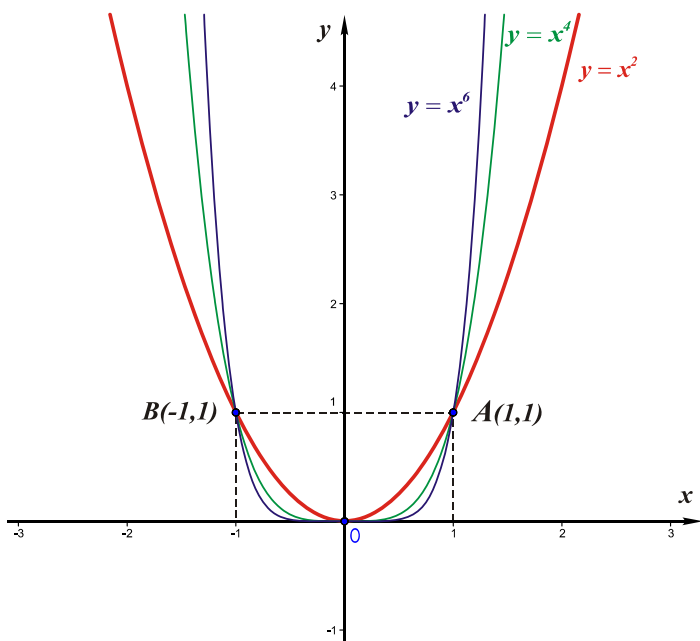


Ток функције:

- (1) Домен:  
Функција је дефинисана за  $\forall x \in R$  односно  
 $D_f = R$
- (2) Нуле функције:  
 $y = 0$  за  $x = m$ .
- (3) Знак функције:  
 $y > 0$  за  $x \in (m, +\infty)$   
 $y < 0$  за  $x \in (-\infty, m)$
- (4) Монотоност:  
 $y \nearrow$  за  $\forall x \in D_f$
-

(2) Степена функција  $y = x^n$  :

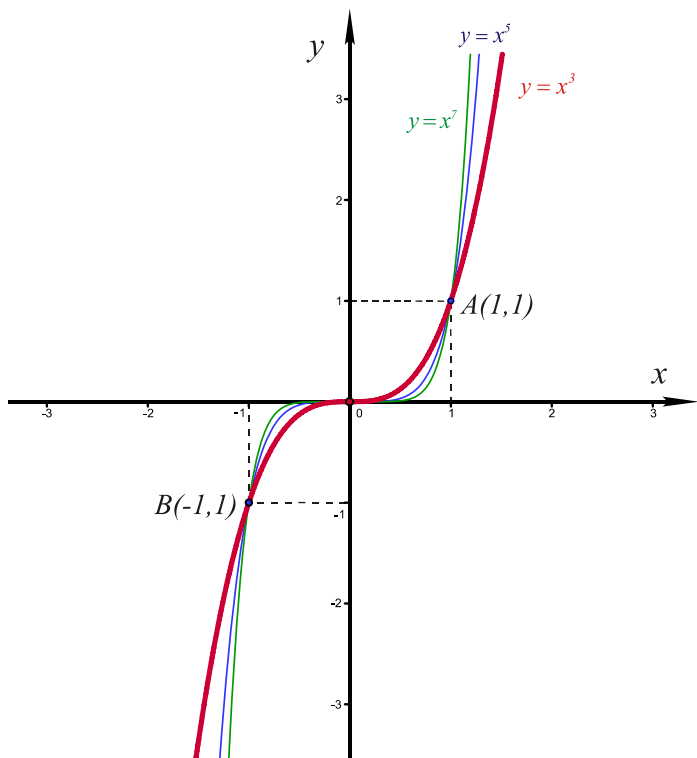
(2.a)  $y = x^{2k}$ ;  $k \in \mathbb{N}$



Ток функције:

- (1) Домен:  
Функција је дефинисана за  $\forall x \in \mathbb{R}$  односно  $D_f = \mathbb{R}$
- (2) Нуле функције:  
 $y = 0$  за  $x = 0$ .
- (3) Знак функције:  
 $y > 0$  за  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- (4) Монотоност:  
 $y \nearrow$  за  $x \in (0; +\infty)$   
 $y \searrow$  за  $x \in (-\infty; 0)$
- (5) Екстремне вредности:  
 $y_{\min} = 0$  за  $x = 0$

(2.b)  $y = x^{2k+1}$ ;  $k \in \mathbb{N}$

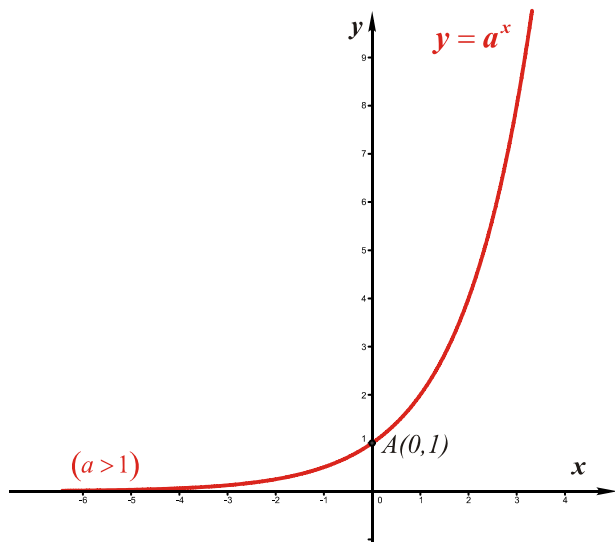


Ток функције:

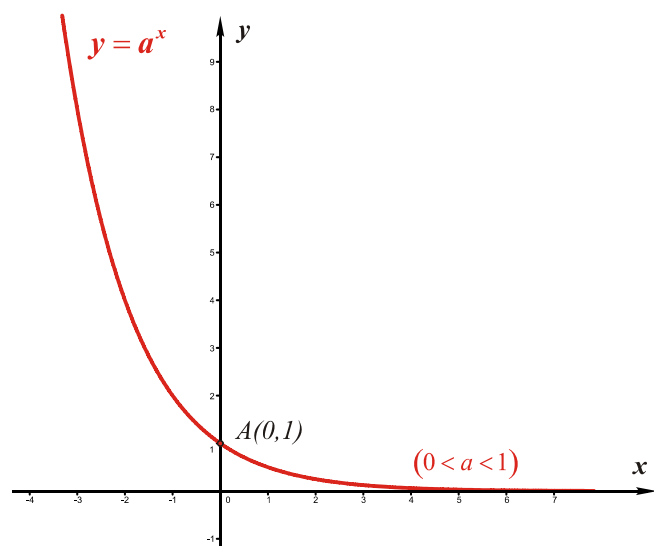
- (1) Домен:  
Функција је дефинисана за  $\forall x \in \mathbb{R}$  односно  $D_f = \mathbb{R}$
- (2) Нуле функције:  
 $y = 0$  за  $x = 0$ .
- (3) Знак функције:  
 $y > 0$  за  $x \in (0, +\infty)$   
 $y < 0$  за  $x \in (-\infty, 0)$
- (4) Монотоност:  
 $y \nearrow$  за  $\forall x \in D_f$

(3) Експоненцијална функција:

$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$



Ток функције:

(1) Домен:

Функција је дефинисана за  $\forall x \in \mathbb{R}$  односно  $D_f = \mathbb{R}$

(2) Нуле функције:

Нема нула функције.

(3) Знак функције:

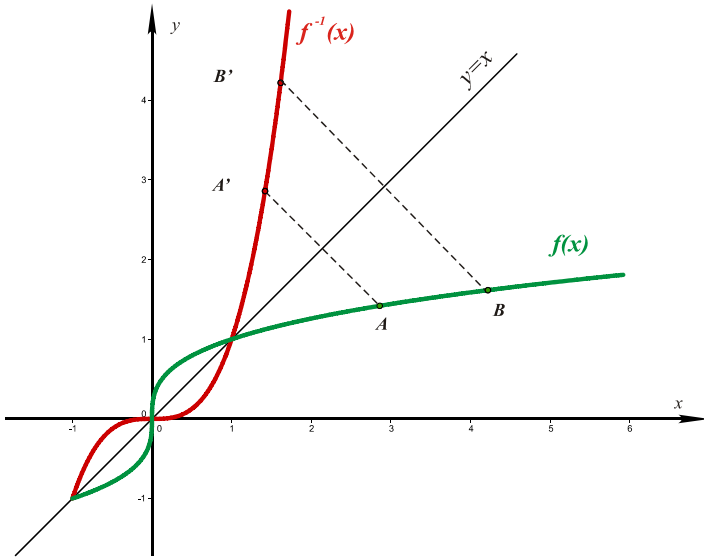
$$y > 0 \text{ за } \forall x \in D_f$$

(4) Монотоност:

$$y \nearrow \text{ за } \forall x \in D_f$$

$$y \searrow \text{ за } \forall x \in D_f$$

## ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

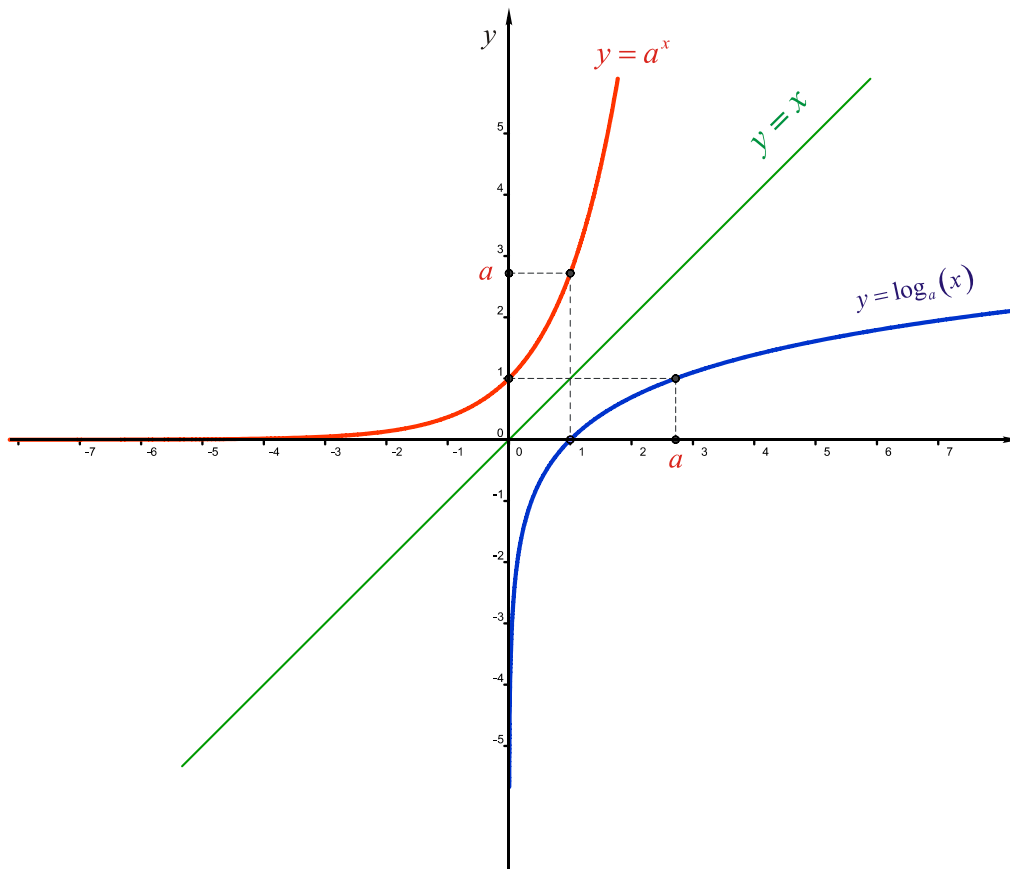


Ако је дефинисана функција  $f : A \rightarrow B$  тако да се пресликава  $x \rightarrow f(x)$  онда се може дефинисати инверзна функција  $f^{-1} : B \rightarrow A$  тако да се пресликава  $f(x) \rightarrow x$ , односно:

$$f^{-1}[f(x)] = x$$

График функције  $f(x)$  је осно симетричан са графиком функције  $f^{-1}(x)$  у односу на праву  $y = x$ .

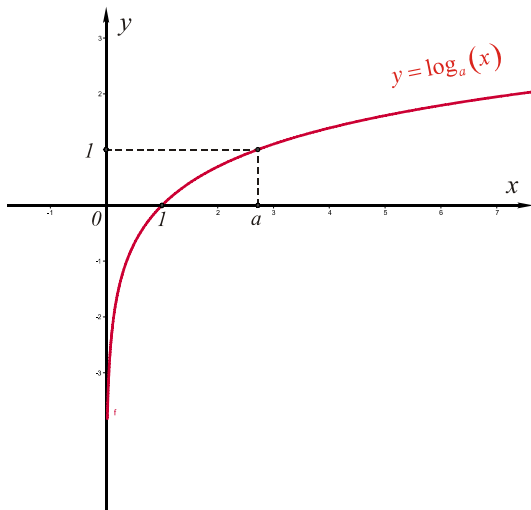
Пошто је  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  то су функције  $y = \log_a x$  и  $y = a^x$  инверзне па су њихови графици симетрични у односу на праву  $y = x$ .



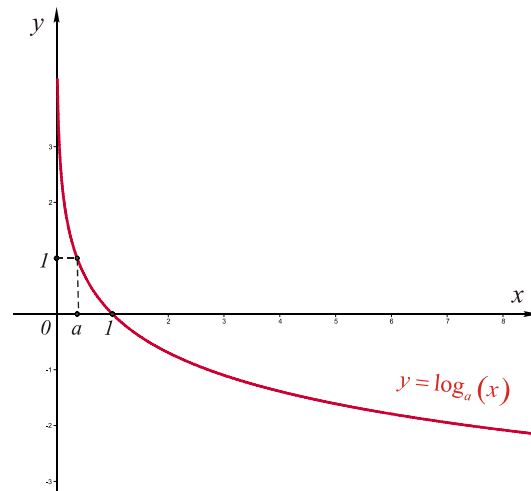


(4) Логаритамска функција:

$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$



Ток функције:

(1) Домен:

Функција је дефинисана за  $x > 0$  односно

$$D_f = (0, +\infty)$$

(2) Нуле функције:

$$y = 0 \text{ за } x = 1$$

(3) Знак функције:

$y > 0$	за	$x \in (1, +\infty)$		$y > 0$	за	$x \in (1, +\infty)$
$y < 0$	за	$x \in (0, 1)$		$y < 0$	за	$x \in (0, 1)$

(4) Монотоност:

$y \nearrow$	за	$\forall x \in D_f$		$y \searrow$	за	$\forall x \in D_f$
--------------	----	---------------------	--	--------------	----	---------------------

Ако је основа логаритма број  $e \approx 2,72$  онда се тај логаритам означава са  $\ln x$  а график функције  $y = \ln x$  приказан је на следећој слици

Ако је основа логаритма број  $10$  онда се тај логаритам означава са  $\log x$  а график функције  $y = \log x$  приказан је на следећој слици

График функције  $y = \ln x$

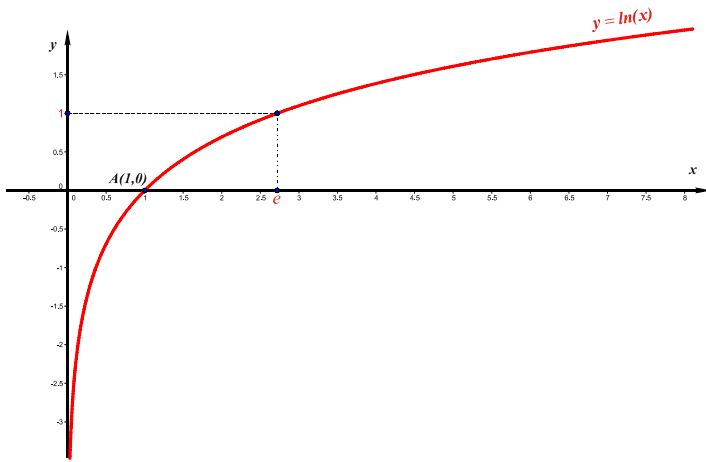
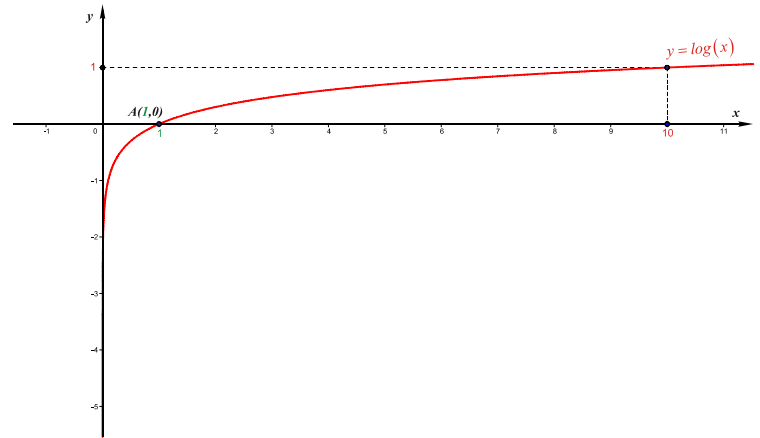
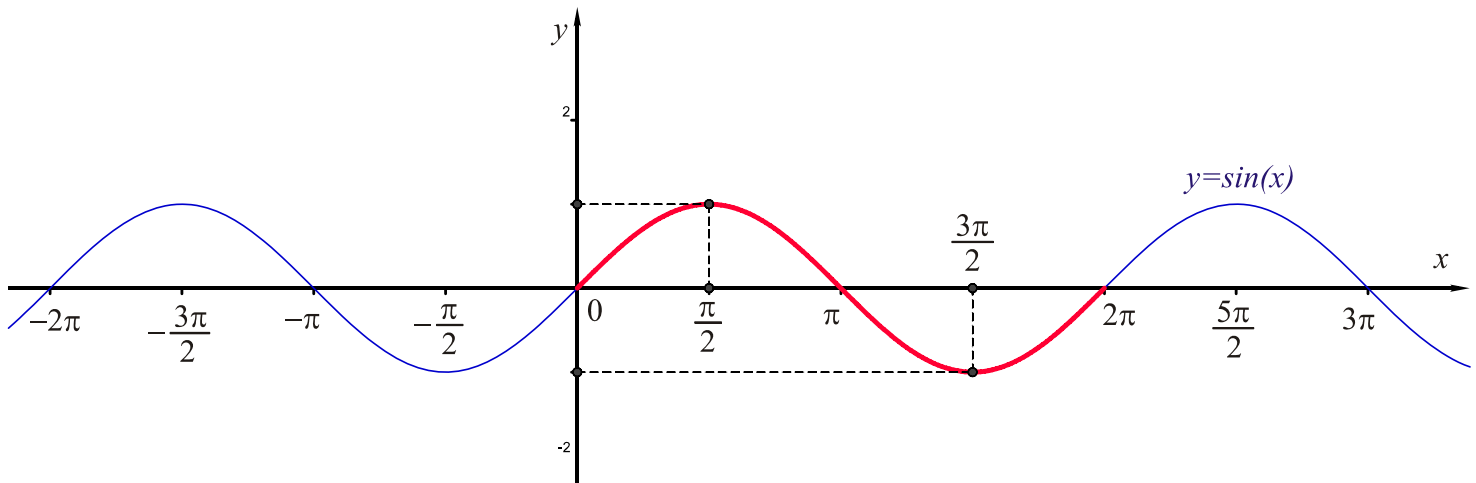


График функције  $y = \log x$



## (5) ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ:

(5.1)  $y = \sin x$



### Ток функције:

(1) домен:  
 $D_f = R$

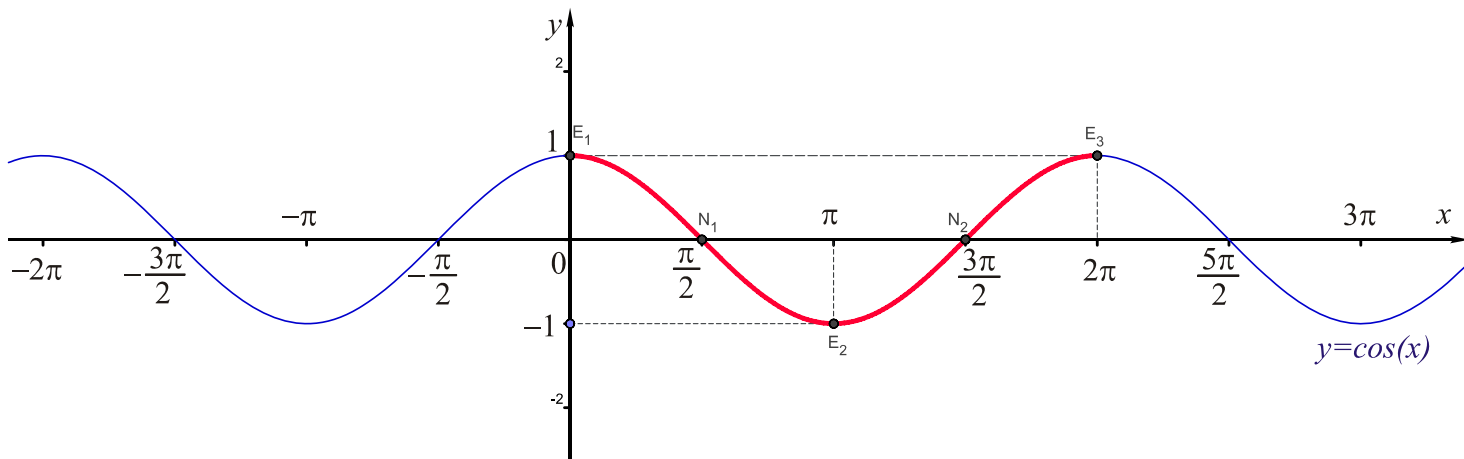
(2) нуле функције:  
 $y = 0$  за  $x = 0 + 2k\pi$  где је  $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$

(3) знак функције:  
 $y > 0$  за  $x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$  где је  $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$   
 $y < 0$  за  $x \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$

(4) монотоност:  
 $y \nearrow$  за  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$  где је  $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$   
 $y \searrow$  за  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

(5) екстремне вредности:  
 $y_{\max} = 1$  за  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  где је  $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$   
 $y_{\min} = -1$  за  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

(5.2)  $y = \cos x$



**Ток функције:**

(1) **домен:**

$$D_f = R$$

(2) **нуле функције:**

$$\boxed{y = 0} \quad \text{за} \quad \boxed{x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \quad \text{где је} \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

(3) **знак функције:**

$$\boxed{y > 0} \quad \text{за} \quad \boxed{x \in \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)} \quad \text{где је} \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

$$\boxed{y < 0} \quad \text{за} \quad \boxed{x \in \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right)}$$

(4) **монотоност:**

$$\boxed{y \nearrow} \quad \text{за} \quad \boxed{x \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)} \quad \text{где је} \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

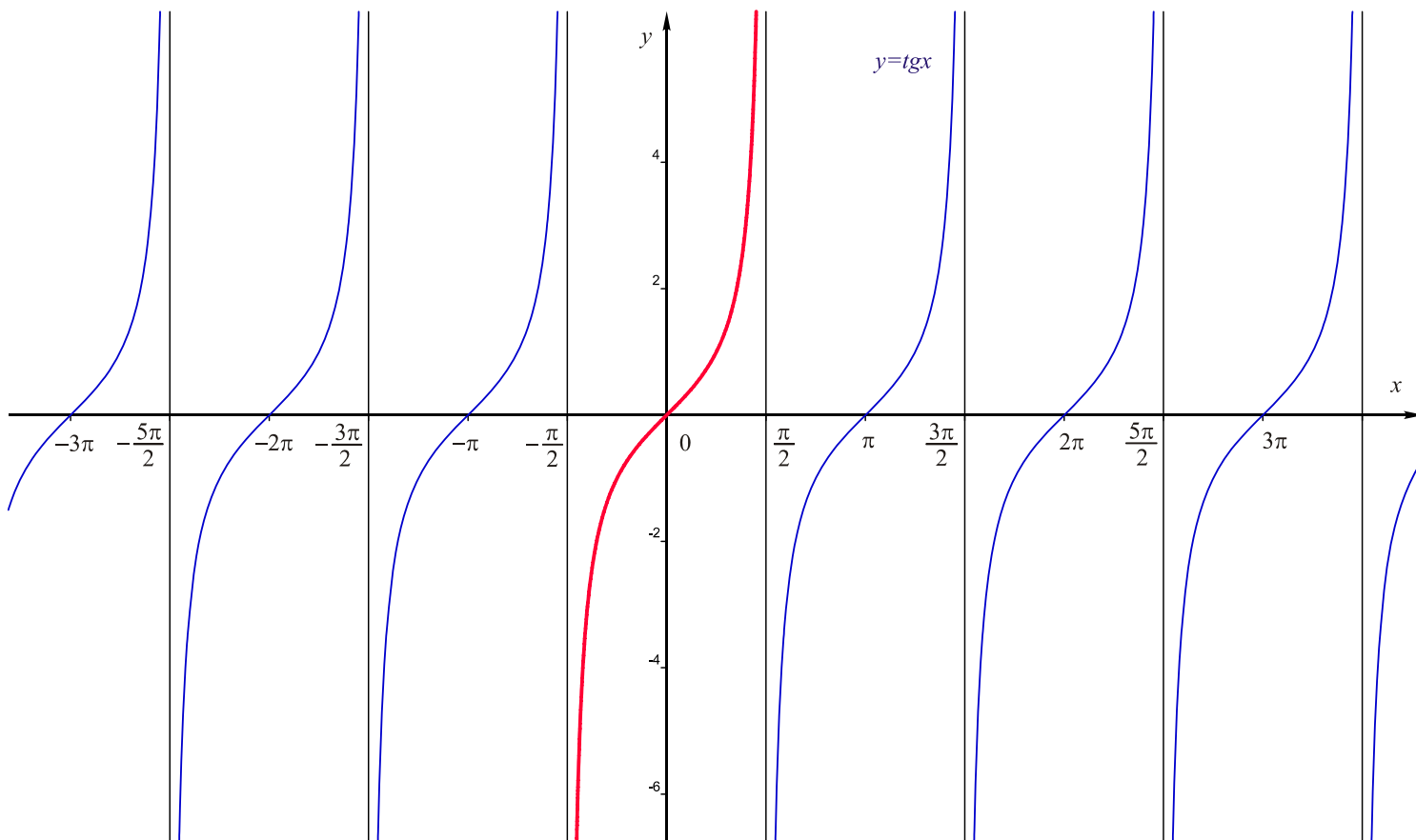
$$\boxed{y \searrow} \quad \text{за} \quad \boxed{x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi)}$$

(5) **екстремне вредности:**

$$\boxed{y_{\max} = 1} \quad \text{за} \quad \boxed{x = 0 + 2k\pi} \quad \text{где је} \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

$$\boxed{y_{\min} = -1} \quad \text{за} \quad \boxed{x = \pi + 2k\pi}$$

(5.3)  $y = \operatorname{tg}x$



**Ток функције:**

(1) **домен:**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \text{ где је } (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

(2) **нуле функције:**

$$\boxed{y = 0} \text{ за } \boxed{x = 0 + k\pi} \text{ где је } (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

(3) **знак функције:**

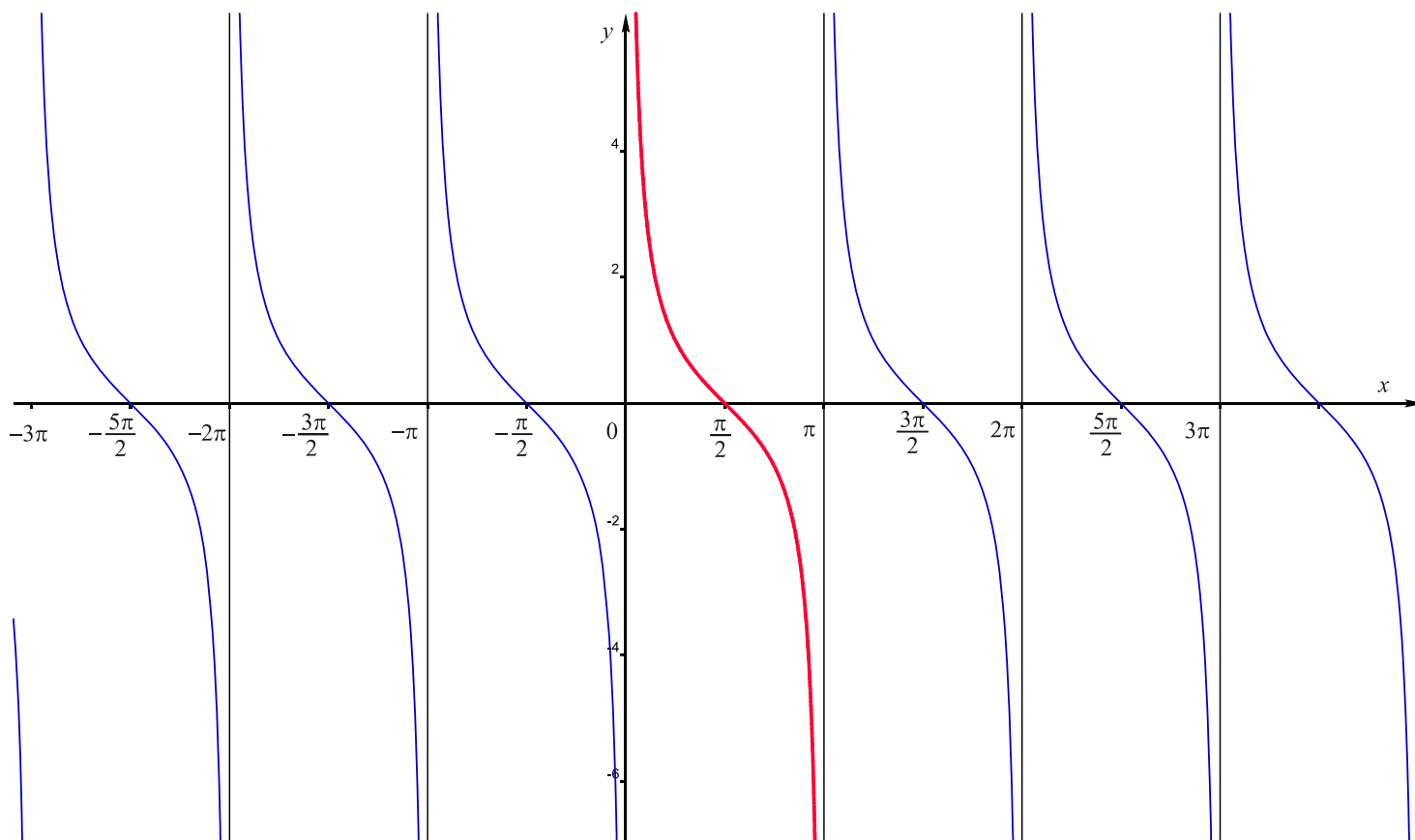
$$\boxed{y > 0} \text{ за } \boxed{x \in \left( 0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)} \text{ где је } (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

$$\boxed{y < 0} \text{ за } \boxed{x \in \left( \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right)}$$

(4) **монотоност:**

$$\boxed{y \nearrow} \text{ за } \boxed{\forall x \in D_f} \text{ где је } (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

(5.4)  $y = \operatorname{ctg} x$



**Ток функције:**

(1) **домен:**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\} \text{ где је } (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

(2) **нуле функције:**

$$y = 0 \text{ за } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ где је } (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

(3) **знак функције:**

$$y > 0 \text{ за } x \in \left( 0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \text{ где је } (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

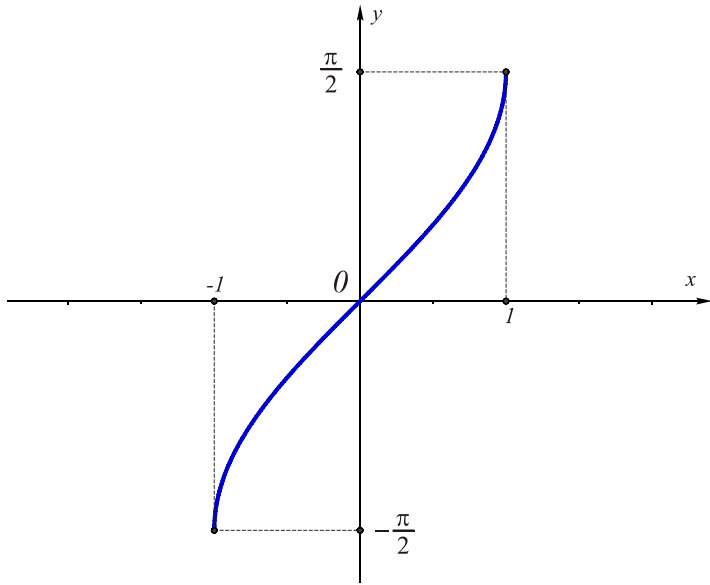
$$y < 0 \text{ за } x \in \left( \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right)$$

(4) **монотоност:**

$$y \searrow \text{ за } \forall x \in D_f \text{ где је } (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

(6) Функције инверзне тригонометријским функцијама (АРКУС ФУНКЦИЈЕ)

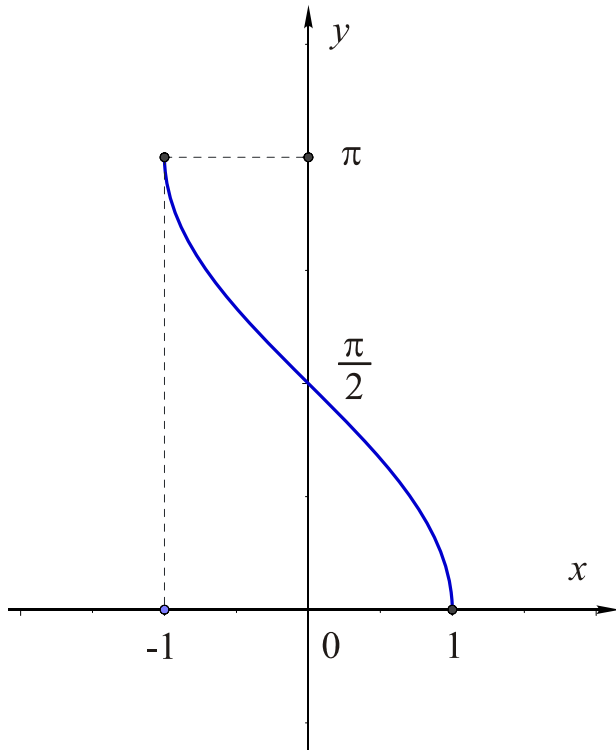
(6.1)  $y = \arcsin x$



Ток функције:

- (1) Домен:  
Функција је дефинисана за  $\forall x \in [-1, 1]$  односно  
 $D_f = [-1, 1]$
- (2) Нуле функције:  
 $y = 0$  за  $x = 0$ .
- (3) Знак функције:  
 $y > 0$  за  $x \in (0, 1)$   
 $y < 0$  за  $x \in (-1, 0)$
- (4) Монотоност:  
 $y \nearrow$  за  $\forall x \in D_f$

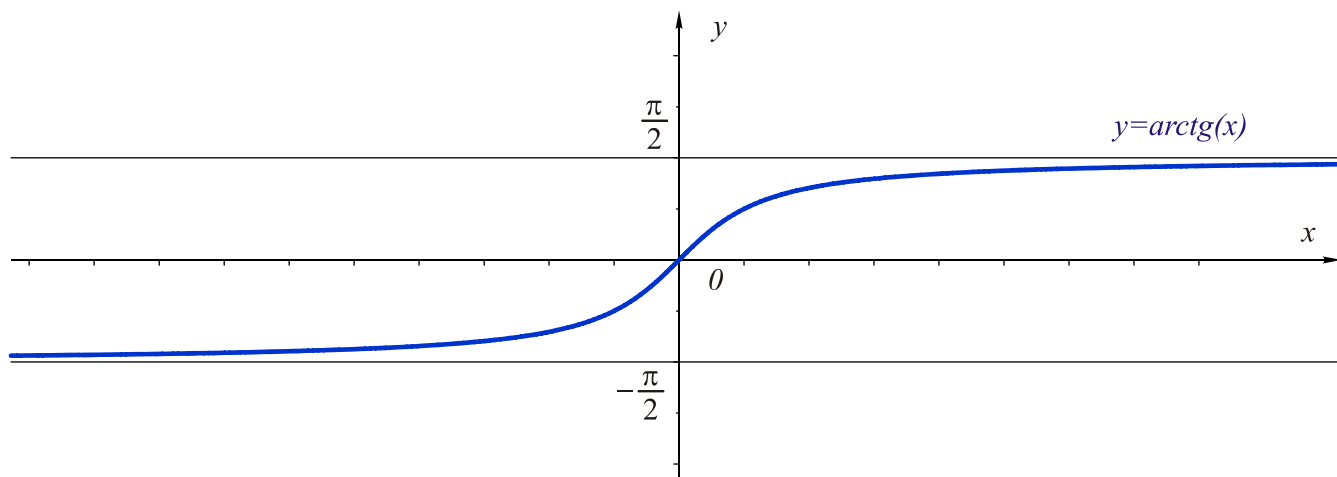
(6.2)  $y = \arccos x$



Ток функције:

- (1) Домен:  
Функција је дефинисана за  $\forall x \in [-1, 1]$  односно  
 $D_f = [-1, 1]$
- (2) Нуле функције:  
 $y = 0$  за  $x = 1$
- (3) Знак функције:  
 $y > 0$  за  $\forall x \in (-1, 1)$
- (4) Монотоност:  
 $y \searrow$  за  $\forall x \in D_f$

(6.3)  $y = \arctg x$



**Ток функције:**

(1) **Домен:**

Функција је дефинисана за  $\forall x \in \mathbb{R}$  односно  $D_f = \mathbb{R}$

(2) **Нуле функције:**

$y = 0$  за  $x = 0$ .

(3) **Знак функције:**

$y > 0$  за  $x \in (0, +\infty)$

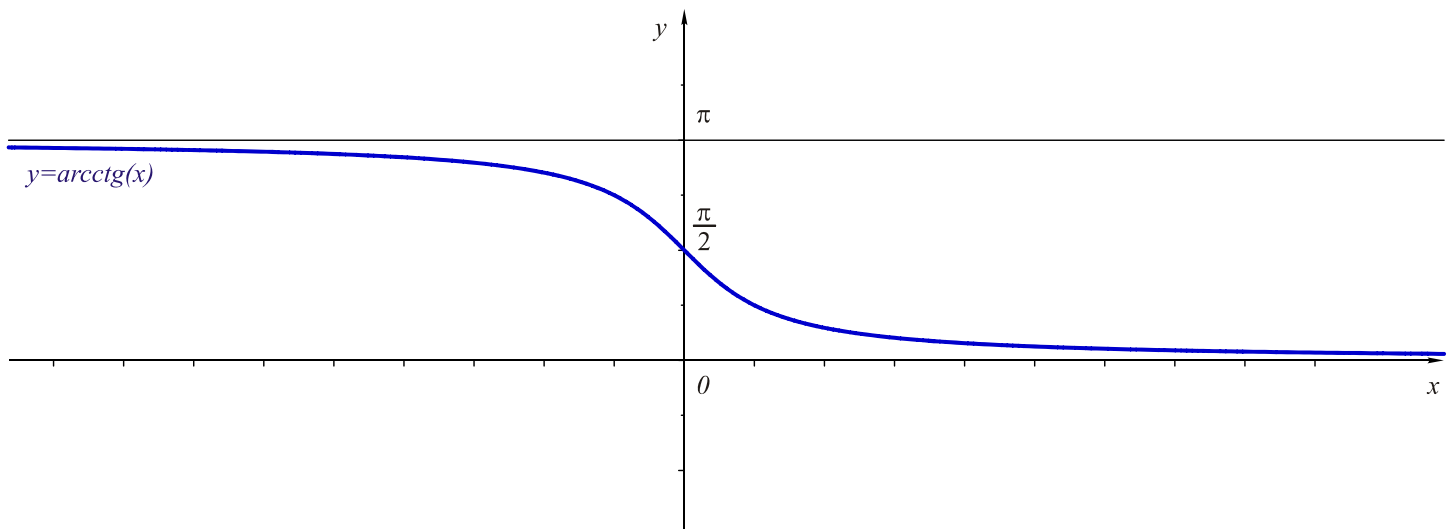
$y < 0$  за  $x \in (-\infty, 0)$

(4) **Монотоност:**

$y \nearrow$  за  $\forall x \in D_f$



(6.4)  $y = \operatorname{arccotg} x$



**Ток функције:**

(1) **Домен:**

Функција је дефинисана за  $\forall x \in \mathbb{R}$  односно  $D_f = \mathbb{R}$

(2) **Нуле функције:**

Не постоје "нуле функције"

(3) **Знак функције:**

$y > 0$  за  $\forall x \in D_f$

(4) **Монотоност:**

$y \searrow$  за  $\forall x \in D_f$

<b>ТАБЛИЦА ИЗВОДА</b>			<b>ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛА</b>	
(1)	$(C)' = 0$	$\Rightarrow$	(1)	$\int 0 dx = C$
(2)	$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\Downarrow$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\Rightarrow$	(2)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
(3)	$(a^x)' = a^x \ln a$	$\Rightarrow$	(3)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
(4)	$(e^x)' = e^x$	$\Rightarrow$	(4)	$\int e^x dx = e^x + C$
(5)	$(\log_a  x )' = \frac{1}{x \ln a}$	$\Rightarrow$	(5)	$\int \left(\frac{1}{x \ln a}\right) dx = \log_a  x  + C$
(6)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\Rightarrow$	(6)	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
(7)	$(\sin x)' = \cos x$	$\Rightarrow$	(7)	$\int \cos x = \sin x + C$
(8)	$(\cos x)' = -\sin x$	$\Rightarrow$	(8)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
(9)	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\Rightarrow$	(9)	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
(10)	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\Rightarrow$	(10)	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
(11)	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\Rightarrow$	(11)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
(12)	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\Rightarrow$	(12)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$
(13)	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\Rightarrow$	(13)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
(14)	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\Rightarrow$	(14)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arcctg} x + C$

